

## Matemots

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (podeu rellegir-ne l'article introductorï al núm. 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüistics següents a partir de la definició donada i les pistes incloses.

En aquesta ocasió tornem a fer un monogràfic, però no pretengueu cercar les respostes al diccionari, ni en una llista de noms propis. Aquesta vegada cal trobar **símbols** d'operadors, funcions, etc., però que són **abreviacions** de paraules, i que eventualment es poden pronunciar, com ara arg, det, Im, log o sup. Fora d'aix, els enunciats segueixen les nostres convencions habituals.

Com que el nombre d'abreviacions usades en matemàtiques és relativament curt, no en direm el nombre de lletres.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pgina.<sup>26</sup>

1. Eixut fins que arriba la trigonometria.
2. Aix et queda el cap si inverteixes malament la tangent.
3. Té un vincle sòlid amb els angles.
4. Comparatiu entre sinus i cosinus.
5. Gens ni mica davant d'un imaginari pur.
6. No n'hi ha cap de més gran que el Mad.
7. A baix de tot, al principi de l'avern.
8. Compta, i punxa.

## Tesis

- ELOI PUERTAS I PRATS va llegir la seva tesi, dirigida per Oriol Pujol Vila i Sergio Escalera Guerrero, titulada *Generalized stacked sequential learning*, el dia 14 novembre del 2014. La tesi correspon a la Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



En molts problemes d'aprenentatge supervisat, com ara pot ser el problema de classificació, s'assumeix que les dades són independents i idènticament distribuïdes. Aquest supòsit no és cert en molts casos reals. Per exemple, en el cas de voler classificar cada píxel d'una imatge en una categoria o objecte, si prenem una parella veïna d'exemples amb les seves etiquetes, veiem que habitualment existeix algun tipus de relació. Normalment els píxels veïns pertanyen a la mateixa categoria o objecte, exceptuant, és clar, les vores. Els algorismes d'aprenentatge seqüencial tenen en compte aquestes relacions per millorar la classificació. En la literatura, hi ha diferents enfocaments que tracten de capturar i explotar aquesta correlació a través de diferents metodologies. En aquesta tesi ens

centrem en les estratègies de metaaprenentatge i, en particular, ens centrarem en el marc del *stacked sequential learning* (SSL). Així doncs, la principal aportació d'aquesta tesi és generalitzar el marc de l'SSL destacant el paper clau de com modelar les interaccions de veïnatge. Proposem una manera eficaç i eficient de capturar i explotar correlacions seqüencials que tinguin en compte interaccions de llarg abast. Hem provat el nostre mètode en diverses tasques: classificació de línies de text, classificació de píxels d'imatges, problemes de classificació multiclasse i problemes de segmentació d'imatges de cossos humans en parts. Els resultats en aquestes tasques mostren clarament que el nostre enfocament supera el marc bàsic de l'SSL, aix com metodologies

<sup>26</sup>

Respostes als Matemots: 3. cos, 8. Card, 6. marx, 1. sec, 4. tan, 7. int, 2. cot, 5. Re

estàndards usant models gràfics com poden ser els *conditional random fields*.

Tal com hem dit, l'aprenentatge seqüencial assumeix que donada una distribució conjunta de les mostres de dades  $X$  i les seves etiquetes  $Y$ , aquestes no es troben distribuïdes de forma independent. En aquest cas, doncs, els exemples es consideren com una seqüència de parelles: exemple i la seva etiqueta  $(X, Y)$ , de tal manera que en els exemples que siguin veïns, les seves etiquetes també presenten algun tipus de relació.

Cohen i Carvalho [1] van desenvolupar una metodologia d'aprenentatge seqüencial basat en metaaprenentatge anomenat *stacked sequential learning* (SSL). Aquesta metodologia consisteix en un sistema classificador de dues capes, en què un primer classificador base  $H_1(x)$  s'entrena amb les dades originals  $X$ . A continuació, es crea un conjunt de dades ampliat que uneix d'una banda les dades d'entrenament originals  $X$  i de l'altra les etiquetes  $Y'$  produïdes pel classificador base sobre el mateix conjunt, tenint en compte una finestra de mida fixa al voltant de cada exemple  $x$ . A continuació, el segon classificador  $H_2(x)$  s'entrena amb aquest nou conjunt de característiques. El resultat final és un conjunt de prediccions  $\hat{Y}$ .

En la tesi es fa una proposta per generalitzar la metodologia SSL, que consisteix a incloure una nova funció anomenada  $J$ . En aquest cas, fem el mateix que abans. Entrenem un classificador  $H_1(x)$  amb el conjunt de dades d'entrada  $X$  i obtenim les etiquetes predites però també el conjunt de probabilitats de cada píxel de pertànyer a una classe,  $Y'$ . A continuació, la nova funció  $J$  és la que defineix la política de model de veïnatge sobre les etiquetes predites, on:

$$z = J(y', \rho, \theta): \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^w,$$

és una funció que captura la interacció de dades amb un model parametrizat per  $\theta$  en un entorn  $\rho$ . El resultat d'aquesta funció és un valor  $w$ -dimensional, on  $w$  és el nombre d'elements en el suport de l'entorn  $\rho$ . A continuació, igual que abans, la sortida  $z$  s'uneix amb les dades d'entrenament original i es crea el conjunt d'entrenament estès. Aquest nou conjunt s'utilitza per entrenar el segon classificador  $H_2(x)$  amb l'objectiu de produir la predicció final  $\hat{Y}$ . Cal observar que el sistema és capaç de tenir en

compte les relacions de veïnatge dependent de la manera com aquestes siguin caracteritzades per la funció  $J$ . En la tesi es treballa amb diferents maneres de modelitzar aquesta funció  $J$ . La que ens dona més bons resultats és en la qual primer fem una descomposició multiresolució i llavors fem un mostreig en forma de quadrícula per tal de seleccionar la finestra de dimensió  $w$ .

La descomposició multiresolució deriva directament de la teoria de multiresolució clàssica del processament i anàlisi d'imatges [2]. Donada  $Y'$ , un conjunt de probabilitats de pertànyer a una certa classe, definim la descomposició multiresolució  $\Phi$ , de la manera següent:

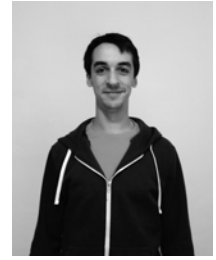
$$\Phi(s) = Y' * G(0, \gamma^{s-1})$$

on  $s \in \{1, 2, \dots, S\}$  representa l'escala;  $*$  és l'operador de convolució i  $G$  és una distribució gaussiana multidimensional amb mitjana igual a zero i  $\sigma = \gamma^{s-1}$  sent  $\gamma$  el pas de la descomposició multiresolució (típicament  $\gamma$  val 2). En el nostre cas aquesta metodologia l'apliquem sobre les etiquetes procedents de la classificació de píxels d'imatges, per tant, les imatges que obtenim representen la probabilitat d'una certa classe. Com a resultat, la descomposició multiresolució proporciona informació respecte a l'homogeneïtat espacial i la regularitat sobre les etiquetes a diferent escala. És fàcil comprendre que, per exemple, una classificació sorollosa a escala 1 no influeix en els resultats de l'escala 3. D'aquesta manera, les escales més altes són robustes a la presència de soroll en les etiquetes ocasionat pels píxels que el classificador hagi predit malament i, al mateix temps, les escales més petites poden preservar diferents nivells de detalls com poden ser les fronteres entre objectes.

## Referències

- [1] W.W. Cohen, V.R. de Carvalho «Stacked sequential learning», *Proceedings of IJCAI 2005*, 671–676, 2005.
- [2] P. Burt, E. Adelson. «The laplacian pyramid as a compact image code», *IEEE Transactions on Communications*, 532–540, 1983.

- TONI PENYA-ALBA va llegir la seva tesi, dirigida per Jesús Cerquides Bueno i Juan A. Rodríguez-Aguilar, titulada *Approximate algorithms for decentralized supply chain formation.*, el dia 16 de desembre del 2014. La tesi correspon a la Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial de la UAB.



La formació de cadenes de subministrament implica determinar els participants i l'intercanvi de béns en una xarxa de producció. Avui dia les companyies operen autònomament, prenen decisions localment i es coordinen amb altres companyies per comprar i vendre béns al llarg de les seves cadenes de subministrament. La presa de decisions de manera descentralitzada és una eina escaient per a aquest tipus d'escenari perquè preserva millor la privacitat dels participants, ofereix millor escalabilitat en escenaris de gran escala i és més *resilient* a fallides. A més a més, la formació de cadenes de subministrament de manera descentralitzada es pot dur a terme mitjançant comunicació entre parells de participants o mitjançant la introducció de mercats locals que actuen com a mediadors sobre l'intercanvi de béns. Malauradament, els mètodes actuals per a la formació de cadenes de subministrament de manera descentralitzada, tant en el cas de comunicació entre parells com en el cas mediat, no tenen la capacitat de trobar solucions que siguin computacionalment i econòmicament eficients.

El principal objectiu d'aquesta tesi és produir mètodes econòmicament i computacionalment per a la formació de cadenes de subministrament de manera descentralitzada, tant pel al cas en què la comunicació és entre parells com en el cas mediat. Això s'aconsegueix mitjançant dues versions de l'algorisme de max-sum optimitzades pel cas de la formació de cadenes de subministrament.

D'una banda, en aquesta tesi contribuïm a la formació de cadenes de subministrament amb comunicació entre parells amb l'algorisme *reduced binarized loopy belief propagation* (RB-LBP). L'RB-LBP s'implementa sobre un sistema multiagent en el qual cadascun dels participants en la formació de la cadena de subministrament està representat per un agent

computacional. A més, el mecanisme de computació de missatges a RB-LBP permet calcular aquests missatges de manera eficient. Això resulta en un algorisme que és capaç de trobar solucions al problema de formació de cadenes de subministrament de valor més elevat alhora que redueix la memòria, l'ample de banda i els recursos computacionals requerits.

D'altra banda, en aquesta tesi contribuïm a la formació de cadenes de subministrament en entorns medians amb l'algorisme *chaining agents in mediated environments* (CHAINME). CHAINME s'implementa sobre un sistema multiagent en què cadascun dels participants i cadascun dels béns a la cadena de subministrament és representat per un agent computacional. A CHAINME el agents dels participants es comuniquen exclusivament amb els agents representant els béns, que actuen com a mediadors. Tal com succeeix amb RB-LBP, CHAINME posseeix un mecanisme per a la computació eficient de missatges. Per tant, CHAINME és capaç de trobar solucions econòmicament eficients alhora que requereix una fracció dels recursos computacionals requerits per l'estat de l'art tant en comunicació entre parells com en entorns medians.

Per concloure, el disseny i la implementació de tots dos algorismes segueixen la mateixa metodologia. És a dir, primer mapegem el problema en qüestió a un graf de termes locals sobre el qual max-sum pot operar. Després, assignem cada terme local a un agent computacional. Finalment, derivem expressions per calcular de manera eficient els missatges intercanviats entre agents. El fet que aquesta metodologia hagi resultat vàlida per al disseny d'algorismes per a la formació de cadenes de subministrament, junt amb la seva generalitat, fa que aparegui com un candidat prometedor per resoldre altres problemes de coordinació multiagent.

- ESTHER IBÁÑEZ MARCELO va llegir la seva tesi, dirigida per Tomás Alarcón Cor, titulada *Evolutionary dynamics of populations with genotype-phenotype map / Dinàmica evolutiva de poblacions dotades amb aplicació genotip-fenotip*, el dia 19 de desembre del 2014. La tesi correspon al Grup de Computació i Biologia Matemàtica al Centre de Recerca Matemàtica.



Aquesta tesi tracta des d'un punt de vista teòric el problema biològic de la relació genotip-fenotip i la seva influència en l'evolució d'una població. Per fer-ho es desenvolupa un model multiescala de la dinàmica evolutiva d'una població de cèl·lules, tenint en compte la correspondència entre el genotip (informació continguda en l'ADN) i el fenotip (característica expressada a partir del genotip). De fet, la relació entre el fenotip i el genotip ve determinada per les interaccions entre gens (xarxa de regulació genètica).

Una característica destacable de les poblacions amb aplicació genotip-fenotip és que les pressions selectives actuen sobre els fenotips, en lloc dels genotips. Altres models no tenien en compte aquesta consideració, de manera que el model proposat innova sobre els anteriors tenint en compte aquesta premissa. Així doncs, el nostre model multiescala genera l'evolució d'una xarxa genotip-fenotip representada per un graf pseudobipartit, el qual permet formular una definició topològica dels conceptes de robustesa i capacitat evolutiva en termes de grau i *clustering* del graf associat.

D'altra banda, s'estudia el problema de la fugida evolutiva i la supervivència, tenint en compte la correspondència entre genotips i fenotips. És a dir, calculem les probabilitats d'evolucionar dins d'una xarxa de genotips-

fenotips a un fenotip més ben adaptat al medi, és a dir, amb una taxa de reproducció superior a la resta. Per estudiar aquest problema ens basem en un procés de ramificació amb tipus múltiples. A més a més, presentem una anàlisi comparativa de probabilitats de fugida evolutiva entre les xarxes de genotip-fenotip obtingudes a partir del model multiescala i les xarxes construïdes assumint un espai de genotips de tipus hipercub regular. Compararem els efectes de la probabilitat de fugida i la freqüència d'escapament associades a la dinàmica evolutiva entre ambdues classes de grafs.

Els enfocaments tradicionals per a l'estudi de la fugida o escapament suposen una taxa de reproducció en el genotip de fugida propera a infinit. Per tant, la supervivència és equivalent a la fugida. Aquí analitzem el procés de supervivència suposant fugida i aprofitant el fet que l'entorn natural del problema de fugida dota el sistema d'equacions d'una separació d'escala de temps: un règim inicial, de temps ràpid, en què la fugida realment es produeix; seguit d'una dinàmica molt més lenta dins de la xarxa neutra del fenotip de fugida. La probabilitat de supervivència s'analitza en termes de les característiques topològiques de la xarxa neutra del fenotip de fugida.

- JORDI CANELA SÁNCHEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Núria Fagella Rabionet i Antonio Garijo Real, titulada *On a family of degree 4 Blaschke products*, el dia 18 de març del 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



Aquesta tesi doctoral pertany a l'àmbit dels sistemes dinàmics discrets al pla complex, és a dir, la iteració de funcions analítiques en una variable complexa. Donada una funció racional  $f$  de l'esfera de Riemann en ella mateixa,

considerem el sistema dinàmic donat pels seus iterats. L'esfera es divideix en dos conjunts completament invariants per  $f$ : el *conjunt de Fatou*, definit com el conjunt de punts  $z$  on la família  $\{f^n\}_n$  és normal en algun entorn

de  $z$ , i el seu complementari, el *conjunt de Julià*. La dinàmica de les òrbites del conjunt de Fatou és estable en el sentit de normalitat o equicontinüitat, mentre que la dinàmica al conjunt de Julià presenta un caràcter caòtic. Aquesta tesi se centra en l'estudi de la família de productes de Blaschke  $B_a(z) = z^3(z - a)/(1 - \bar{a}z)$ , on  $a$  i  $z$  són nombres complexos. Estudiem el seu pla de paràmetres i el seu pla dinàmic fent ús intensiu de les eines de cirurgia quasiconforme, que ens permeten construir funcions racionals amb una dinàmica prescrita fent servir funcions quasiregulars com a models.

Al capítol 1 fem un repàs dels resultats preliminars usats al llarg del text. Primer expliquem els conceptes bàsics de la dinàmica de les funcions racionals. Després fem un repàs de les aplicacions del cercle, introduint els conceptes de producte de Blaschke i llengües. Finalment, presentem la fórmula de Riemann-Hurwitz i com s'aplica a la dinàmica de funcions racionals. Al capítol 2 donem una introducció a la cirurgia quasiconforme. Primer de tot definim els conceptes d'aplicació quasiconforme, estructures quasiconformes i *pull-back* sota funcions que preserven l'orientació i introduïm el teorema mesurable de Riemann. Tot seguit mostrem com els conceptes previs són generalitzats per a aplicacions que giren l'orientació i veiem com això s'aplica a funcions que són simètriques respecte del cercle unitat. Finalment introduïm els conceptes d'aplicació *polynomial-like* i *antipolynomial-like*. Al capítol 3 donem una visió general del pla dinàmic dels productes de Blaschke  $B_a$ . Comencem estudiant les seves propietats bàsiques. Tot seguit mostrem que les funcions  $B_a$  no poden tenir dominis de rotació doblement connexos (anells de Herman) (Proposició 3.2.3) i provem

un criteri de connectivitat del conjunt de Julià dels  $B_a$  (Teorema 3.2.1). Al capítol 4 introduïm la família  $M_b$  de polinomis cúbics amb un punt fix superatractor. A continuació veiem com construir polinomis  $M_b$  a partir de productes de Blaschke  $B_a$ , obtenint una aplicació  $\Gamma$  que envia un subconjunt de l'espai de paràmetres de  $B_a$  a l'espai de paràmetres dels polinomis  $M_b$ . També provem que l'aplicació  $\Gamma$  és contínua i és un homeomorfisme restringit a cada component hiperbòlica disjunta. Al capítol 5 estudiem l'espai de paràmetres dels productes de Blaschke  $B_a$ . Primer de tot en descrivim les simetries. A continuació classifiquem els diferents tipus de comportaments hiperbòlics que es poden donar i veiem a quines regions de l'espai de paràmetres poden aparèixer. Tot seguit construïm una aplicació *polynomial-like* al voltant de tot paràmetre de no escapament contingut en una regió d'intercanvi que, sota certes condicions, pot relacionar la dinàmica de  $B_a$  amb la dels antipolinomis  $p_c(z) = \overline{z^2} + c$  (teorema 5.3.4). Finalment parametritzem tota component hiperbòlica disjunta els cicles atractors de la qual són acotats i no rauen al cercle unitat (teorema 5.4.2). Al capítol 6 estudiem les llengües dels productes de Blaschke  $B_a$ . Inicialment provem algunes de les seves propietats topològiques bàsiques com ara la seva connectivitat mòdul simetria, la seva connectivitat simple i l'existència d'una única punta per a cada llengua (teorema 6.2.1). Tot seguit mostrem com es produeixen les bifurcacions en un entorn de la punta de cada llengua (teorema 6.3.2). Finalment estudiem com les llengües s'estenen per a paràmetres  $a$  tals que  $1 < |a| < 2$ . Al capítol 7 estudiem com els productes de Blaschke  $B_a$  poden ser generalitzats com a funcions racionals de grau  $m + 2$  per  $m > 2$ .



- NADIA F. CLAVERO va llegir la seva tesi, dirigida per F. Javier Soria de Diego, titulada *Optimal Sobolev embeddings in spaces with mixed norm*, el dia 20 de març del 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.



Aquest treball fa referència a les estimacions amb espais funcionals, els quals relacionen la norma d'una funció i les seves derivades. Les primeres tasques amb aquesta línia de recerca van ser dutes a terme per Sobolev durant els anys trenta. Ell va introduir els espais que porten el seu nom, i va demostrar el seu teorema:

$$W^1 L^p(I^n) \longrightarrow L^{\frac{pn}{n-p}}(I^n), \quad 1 \leq p < n. \quad (2)$$

Però, el seu mètode no funcionava per a  $p = 1$  i és per això que a finals dels anys cinquanta, Gagliardo i Nirenberg van provar aquest cas. Les seves feines es basaven en a fer estimacions en seccions lineals d'una funció, així van aparèixer els espais de normes mixtes  $R(X, Y)$ . És a dir, van observar

$$W^1 L^1 \longrightarrow R(L^1, L^\infty), \quad (3)$$

i després, fent servir una forma iterada de la desigualtat de Hölder, van concloure que:  $W^1 L^1(I^n) \rightarrow R(L^1, L^\infty) \rightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(I^n)$ . L'any 1987, Fournier va presentar diversos resultats sobre espais de norma mixta. Exactament, el seu treball es va centrar a provar que:

$$R(L^1, L^\infty) \longrightarrow L^{\frac{n}{n-1}, 1}(I^n), \quad (4)$$

i tenint en compte l'estimació de Gagliardo-Nirenberg (2), va obtenir la següent millora de (1):

$$W^1 L^1(I^n) \longrightarrow R(L^1, L^\infty) \longrightarrow L^{\frac{n}{n-p}, 1}(I^n). \quad (5)$$

Durant els últims anys, Pick i els seus col·laboradors han posat dintre d'un marc ampli el problema de les inclusions òptimes. Així, han sabut dir quins són els millors espais, tant de domini major com de rang menor, pels quals es verifiquen aquestes inclusions, considerant els espais invariants per reordenament (r. i.). D'aquesta manera han aportat una nova demostració de (4) i, també, del cas límit de la inclusió de Sobolev:

$$W^1 L^n(I^n) \longrightarrow L^{\infty, n-1}(I^n), \quad (6)$$

i, com a nova contribució, van demostrar l'optimitat d'aquestes estimacions en el context dels espais r. i.

El nostre objectiu és construir una teoria d'inclusions de Sobolev que reculli les principals idees de les línies aquí exposades. Concretament, la finalitat és estudiar les estimacions (2) en el marc dels espais r. i., però també descriure els dominis i els rangs òptims per a aquestes inclusions entre els espais r. i. i els de norma mixta.

És per això que ens vam focalitzar només en inclusions de la forma:

$$\begin{aligned} W^1 Z(I^n) &\longrightarrow R(X, L^\infty) \\ W^Z(I^n) &\longrightarrow R(X, L^1). \end{aligned} \quad (7)$$

Puntualment, seguint les idees de Kerman i Pick (2002), vam proporcionar una caracterització de l'espai menor de norma mixta en (6) quan el domini r. i. es és donat i, per a un espai de norma mixta prèviament fixat, vam determinar el major espai r. i. que verifica (6).

Així mateix, vam provar que els espais de norma mixta, milloren els resultats aconseguits per Kerman i Pick. Per això, vam concloure que les estimacions clàssiques pels espais de Sobolev estàndards  $W^1 L^p$  poden refinar-se encara més si considerem espais de norma mixta els rangs.

És important que, malgrat la inclusió (5) és la millor possible en relació a espais rang r. i. es refereix, Bastero, Milman i Ruiz, d'una banda i Malý i Pick d'una altra, van demostrar que, si els requisits que el rang sigui un espai lineal és eliminat, llavors, una millora de (5) és encara possible. Estimulats per aquests treballs, vam reformular-ne els resultats en termes d'espais de norma mixta.

Paral·lelament, vam estudiar algunes propietats funcionals dels espais de norma mixta, centrant-nos en alguns resultats de la teoria d'interpolació i les relacions entre espais de norma mixta i espais r. i.

- MIGUEL TEIXIDÓ ROMÁN va llegir la seva tesi, dirigida per Miguel Rodríguez Olmos, titulada *A cotangent bundle hamiltonian tube theorem and its applications in reduction theory*, el dia 27 de març del 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.



En aquesta tesi estudiem la geometria simplèctica de fibrats cotangents dotats d'accions induïdes per una acció pròpia d'un grup de Lie en la varietat base. Les varietats simplèctiques neixen amb la interpretació geomètrica de les equacions de Lagrange i Hamilton de la mecànica clàssica. L'estudi de les accions i les reduccions en aquestes varietats també prové d'una motivació mecànica en què les simetries són la principal eina que en molts casos permet simplificar les equacions del moviment.

És sabut que el teorema de Darboux implica que totes les varietats simplèctiques de la mateixa dimensió són localment simplectomorfe. Tanmateix, la geometria local de les varietats simplèctiques dotades d'una acció hamiltoniana per un cert grup de Lie és sorprenentment rica i constitueix un camp originat pels treballs clàssics de Marle (1985), Guillemin i Sternberg (1984). Essencialment, els autors obtenen un model universal per un entorn tubular d'una òrbita qualsevol. Aquest model, anomenat model de Marle-Guillemin-Sternberg (MGS), és una eina extremadament important per a la teoria de les accions hamiltonianes en varietats simplèctiques. Ha estat utilitzada per provar molts resultats de tipus local tant en geometria simplèctica com en la teoria de sistemes hamiltonians simètrics. Proporciona un model per un entorn tubular d'una òrbita de l'acció de forma que posa en forma normal tant l'acció del grup com l'estructura simplèctica. El principal problema del model MGS és que no és explícit. Només se'n pot provar l'existència i les propietats principals. D'altra banda, en el cas que la varietat sigui un fibrat cotangent el model MGS no respecta la fibració natural.

Aquest cas, quan la varietat simplèctica és un fibrat cotangent amb una acció induïda per una acció en la base, és el que estudiem en aquesta tesi. Aquest cas és el que apareix de forma natural en multitud d'exemples, però la

diferència clau amb una varietat simplèctica genèrica és que tenim una estructura fibrada. Estudiar com podem modificar el model MGS per tenir en compte aquesta fibració i aplicar aquest model local per estudiar quin tipus d'estructura addicional tenen els espais reduïts són els objectius principals de la tesi.

En la primera part de la tesi construïm un model MGS especialment adaptat a la geometria dels fibrats cotangents. Aquest model generalitza els resultats obtinguts per T. Schmah (2007) sota certes condicions molt restrictives (òrbites amb moment completament isotròpic). Addicionalment, la nostra construcció és explícita excepte per la integració d'una equació diferencial sobre el grup  $G$ . Aquesta equació pot ser solucionada de forma explícita per als grups  $SO(3)$  o  $SL(2)$ , per tant podem donar explícitament coordenades simplèctiques per a accions arbitràries d'aquests grups sobre qualsevol fibrat cotangent.

En la segona part de la tesi apliquem aquest model MGS cotangent per descriure l'estructura de les reduccions simplèctiques de fibrats cotangents. Si suposem que l'acció del grup de Lie és lliure aquesta descripció és ben coneguda, tanmateix per a accions generals en fibrats cotangents només existien resultats parcials (Perlmutter, 2007). Primerament mostrem que la projecció sobre la base d'una fulla de moment és un espai estratificat de Whitney. També podem refinar l'estratificació de l'espai simplèctic reduït de forma que cadascuna de les peces sigui un espai fibrat. Demostrem que cadascuna d'aquestes peces està dotada d'una forma presimplèctica de rang constant i que sempre hi ha una única peça que és oberta i densa en l'espai reduït. A més, aquesta peça maximal és simplectomorfa a un subfibrat vectorial d'un cert fibrat cotangent. D'aquesta forma aquesta peça maximal es comporta de forma similar al que passa en el cas que l'acció sigui lliure.

- MARIA EULÀLIA MONTORO LÓPEZ va llegir la seva tesi, dirigida per Josep Ferrer i M. Dolors Magret, titulada *Subespais hiperinvariants i característics: una aproximació geomètrica*, el dia 12 de maig del 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.



El tema tractat en aquesta tesi ha estat l'estudi dels subespais hiperinvariants i característics d'una matriu o equivalentment, d'un endomorfisme sobre espai vectorial de dimensió finita. Ens restringim al cas de matrius  $A$  amb polinomi característic totalment descomponible i deixem per a futurs treballs la generalització per a qualsevol polinomi característic. Els subespais  $A$ -hiperinvariants i  $A$ -característics són subclasses dels subespais  $A$ -invariants (aquells que contenen la seva imatge per  $A$ ), concepte clau en la teoria de matrius. Concretament, els subespais  $A$ -hiperinvariants són aquells que també són invariants per a tota matriu que commuta amb  $A$ , mentre que als  $A$ -característics se'ls exigeix només que siguin invariants per a les matrius invertibles que commuten amb  $A$ .

Aquests conceptes apareixen per primer cop a mitjans dels anys trenta dins del context de la teoria de grups. Però no és fins als anys setanta en què es dona una caracterització dels subespais  $A$ -hiperinvariants i es descriu el seu reticle dins del context de la teoria de matrius. En l'any 2009 apareix un article d'Astuti i Wimmer en què es demostra que en el cas de matrius  $A$  amb polinomi característic totalment descomponible, els subespais característics coincideixen amb els hiperinvariants excepte si els coeficients d' $A$  pertanyen a  $GF(2)$  (el cos de cardinal 2). En aquest cas, el teorema de Shoda dona condicions necessàries i suficients per a l'existència de subespais característics no hiperinvariants. Però la caracterització d'aquest tipus de subespais era un problema obert que s'ha resolt en aquesta tesi.

En primer lloc, analitzem el comportament del centralitzador d'una matriu (el conjunt de matrius que commuten amb ella), que suposarem en forma canònica (de Jordan o de Weyr). Concretament, calculem el determinant de les

matrius d'aquests centralitzadors la qual cosa, en particular, ens permet caracteritzar les no singulars. D'altra banda, determinem les imatges d'un subespai vectorial donat respecte al conjunt de totes les matrius del centralitzador, resultat que esdevindrà clau per al posterior estudi dels subespais hiperinvariants.

Comencem aquest estudi determinant condicions per a l'existència de subespais hiperinvariants 1-dimensionals. Més en general, a partir dels resultats esmentats anteriorment, caracteritzem els subespais hiperinvariants  $d$ -dimensionals identificant-los amb particions trivials de la de Weyr i això ens permet obtenir una demostració fàcil de la ja coneguda associada a certes particions compatibles amb la de Segre (que anomenem *hipertuples*). Aquestes caracteritzacions ens permetran comptar explícitament, fixada la dimensió, els subespais hiperinvariants o de forma equivalent les *hipertuples* amb alguns dels coeficients prefixats, resultat que esdevé clau pel comptatge dels subespais característics no hiperinvariants que es mostra al final de la tesi.

En l'última part, abordem el problema d'estudiar els subespais característics que no són hiperinvariants quan existeixen (resultats d'Astuti-Wimmer i Shoda esmentats anteriorment). Concretament donem una construcció explícita a partir d'un tipus de *tuples* associades a certes subparticions de la característica de Segre, que anomenem *chartuples*: a cada chartupla li associem dues classes de subespais, de forma que els subespais característics no hiperinvariants són precisament les sumes directes de dos d'ells, un de cada classe. Finalment, a partir d'aquesta construcció, desenvolupem un algorisme que permet comptar explícitament el nombre de subespais característics no hiperinvariants.



- PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN va llegir la seva tesi, dirigida per Josep J. Masdemont, Mercé Romero-Gómez, titulada *Application of dynamical system methods to galactic dynamics: from warps to double bars*, el dia 29 de juny del 2015. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.



La majoria de galàxies presenten una forma warped quan són vistes des d'un punt de vista lateral. En aquest treball apliquem mètodes de sistemes dinàmics per trobar una explicació d'aquest fenomen que concordi amb la seva abundància entre galàxies, la seva persistència en el temps i la mida dels angles warping observats.

Partint d'un model de galàxia tridimensional senzill però realista, format per una barra i un disc prim, estudiem els efectes que produeix un petit desalineament entre el moment angular del sistema i la seva velocitat angular. Amb aquest fi, es desenvolupa un model de precessió assumint que la barra es comporta com un sòlid rígid. Per estudiar el comportament del sòlid rígid, resollem les seves equacions d'Euler. Estudiem la solució en un sistema de referència de precessió, que fa que el moment i la velocitat angular del cos siguin constants. Després de comprovar que les òrbites periòdiques de l'interior de la barra continuen constituint l'esquelet del sistema, fins i tot després d'aplicar una precessió al potencial, calculem les varietats invariants de les òrbites periòdiques inestables que parteixen dels punts d'equilibri en els extrems de la barra, obtenint evidències de les seves formes warped. Com és conegut a partir d'estudis previs amb models bidimensionals de galàxies, les varietats invariants associades a aquestes òrbites periòdiques marquen la posició dels braços i anells de les galàxies barrades i constitueixen l'esquelet d'aquests elements. Ara, observant-les des d'un punt de vista lateral, comprovem que aquestes varietats presenten formes warped anàlogues a les observades, i amb una gran concordança d'angles.

A més, hem realitzat simulacions de test de partícules per determinar com la precessió aplicada al potencial afecta els estels, confirmant d'aquesta manera els resultats teòrics obtinguts.

Un cop conegut el comportament del model de precessió, sofisticuem aquest amb

un potencial més complex, incloent un halo esfèric, per estudiar la influència de cada paràmetre que dona forma al potencial i per determinar l'efecte de l'halo en la formació de galàxies warped. Hem constatat que la presència de l'halo incrementa l'angle warping.

Apliquem també la teoria de varietats invariants a l'estudi de galàxies amb quatre braços espirals, tals com l'ESO 566-24 i possiblement la Via Làctia. Es prova pel mètode de varietats invariants un model de galàxia amb doble barra com a explicació de la formació dels quatre braços espirals en una galàxia, utilitzant per a això diferents sistemes de doble barra, no restringint-nos a la Via Làctia. Concloem que el model de doble barra no és suficient per explicar la formació de quatre braços espirals, i suggerim possibles refinaments del model galàctic perquè concordi millor amb les observacions experimentals.

El més prometedor d'aquests refinaments del model és considerar la galàxia com un sistema no autònom, on les barres roten a velocitat diferent. Tractar sistemes no autònoms ens condueix a l'estudi de la seva dinàmica per mitjà de les estructures coherents lagrangianes (LCS). Aquesta és una teoria molt recent, encara en desenvolupament, en la qual les LCS organitzen la dinàmica del sistema de manera anàloga a com ho fan les varietats invariants en sistemes autònoms. Hem creat un programa propi per al càlcul de les LCS, que pot ser aplicat a superfícies parametritzades en sistemes de qualsevol dimensió. Per establir la comparació entre LCS i varietats invariants apliquem tots dos mètodes al problema del pèndol, en les seves versions autònoma i no autònoma. Després, calculem les LCS en el nostre model galàctic format per un disc i una barra, sense precessió. Mostrem que les LCS es comporten com les varietats invariants estables, i que proporcionen més informació en una àmplia regió de l'espai.

- ADRIÀ SIMON va llegir la seva tesi, dirigida per Amadeu Delshams, titulada *Diffusion through non-transverse heteroclinic chains: A long-time instability for the NLS*, el dia 6 de juliol del 2015 La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.



En l'article [CKSTT] els autors proven una inestabilitat global per a l'equació de Schrödinger cúbica desenfocant en el tor 2-dimensional. Per aconseguir-ho, detecten un sistema finit d'equacions diferencials ordinàries, l'anomenat *toy model system*, per al qual proven un resultat que típicament s'anomena de difusió: la connexió de  $N$  objectes invariants connectats entre ells mitjançant òrbites heteroclíniques. El que no esmenten és que la intersecció entre les varietats invariants de dos objectes consecutius no és transversal. Això fa descartar, pràcticament, que el mecanisme de difusió sigui regit per la coneguda difusió d'Arnold i, per tant, no hi ha una explicació geomètrica del motiu pel qual aquests objectes invariants poden ser connectats.

L'objectiu principal de la tesi és proposar un mecanisme geomètric que justifiqui el fet que aquesta difusió és possible.

En el Capítol 2 evidenciem que la intersecció entre les esmentades varietats no és transversal en el *toy model system* i mostrem, mitjançant exemples, que aquesta falta de transversalitat pot impedir la connexió en una cadena de transició. Un cop vist que la connexió pot no ser possible si la intersecció no és transversal, detectem el motiu pel qual sí que és possible en el cas del *toy model system*. La raó és l'alta dimensió del problema i que cada nova connexió pren lloc en un espai nou, en unes direccions que encara no s'han utilitzat. D'altra banda

es troben exemples integrables per als quals aquesta difusió és possible, allunyant-nos del tot de la difusió d'Arnold, típica per a sistemes no integrables.

En el mateix capítol es proposa un esquema de detecció per a aquest tipus de difusió mitjançant el llenguatge dels h-sets i les relacions de cobriment, de manera que s'estableix una prova que justifica la connexió sempre que es provin abans certes relacions de cobriment.

Mitjançant aquest esquema de detecció, en el Capítol 3 es prova la connexió en el cas del *toy model system*. Durant la prova, aconseguim millorar el teorema original de difusió de [CKSTT] permetent apropar-nos arbitràriament a la cadena d'heteroclíniques i, en particular, als objectes invariants. De la prova, també en destaquem l'ús de tècniques típiques dels sistemes dinàmics que permeten entendre millor l'esquema de connexió respecte de la prova original.

## Referències

- [CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation*. Invent. Math., **181**(1) (2010), 39–113.

- ANNA TAMARIT SARIOL va llegir la seva tesi, dirigida per Pau Martín i Rafael Ramírez-Ros, titulada *Singular phenomena in the length spectrum of analytic convex curves*, el dia 6 de juliol del 2015 La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.



Considerem l'aplicació billar definida dins d'una corba tancada, analítica i estrictament convexa  $Q$ . Per  $q > 2$  i  $0 < p < q$  coprims, existeixen almenys dues trajectòries  $(p, q)$ -periòdiques dins de  $Q$ . L'objectiu de la tesi és estudiar la diferència maximal entre longituds de trajectòries  $(p, q)$ -periòdiques del billar,  $D(p, q)$ .

La quantitat  $D(p, q)$  aporta informació dinàmica i geomètrica. Primer, caracteritza part de l'espectre de longituds de  $Q$  i per tant té relació amb la pregunta de Kac, *Can one hear the shape of a drum?*. Segon,  $D(p, q)$  és una fita superior de la  $DW(p/q)$  de Mather i quantifica el caos de la taula  $Q$ .

Primer, ens fixem en l'estudi de la diferència maximal de longituds entre òrbites  $(1, q)$ -periòdiques. Aquestes òrbites s'apropen a la frontera del billar a mesura que  $q$  tendeix a infinit. L'estudi de  $D(1, q)$  es fa des de dues perspectives.

D'una banda, obtenim una fita superior exponencialment petita en el període  $q$  per  $D(1, q)$ . El resultat s'obté en el marc general de la diferència maximal de  $(p, q)$ -periòdiques accions entre òrbites  $(p, q)$ -periòdiques en aplicacions *twist* exactes i analítiques.

En particular, establim una fita superior exponencialment petita per les diferències entre accions  $(p, q)$ -periòdiques quan l'aplicació és analítica en una corba invariant rotacional i  $(m, n)$ -ressonant i  $p/q$  està prou a prop de  $m/n$ . L'exponent en la fita superior està estretament lligat a la banda d'analicitat en una variable angular concreta. El resultat s'obté en dos passos. Primer, provem un teorema tipus Neishtadt. Segon, apliquem el principi d'acció de MacKay-Meiss-Percival.

Aquest resultat implica que les longituds de totes les trajectòries  $(1, q)$ -periòdiques en dominis estrictament convexos i analítics són exponencialment properes en el període  $q$ , fet que millora el resultat clàssic de Marvizi and i Melrose sobre el cas regular. Però el resultat també pot aplicar-se en altres contextos de les aplicacions billar i billar dual. Per exemple, mostrem que les àrees de les trajectòries  $(1, q)$ -

periòdiques del billar dual són exponencialment properes en el període  $q$ . Aquest resultat millora un resultat clàssic de Tabachnikov pel cas regular.

D'altra banda, analitzem fórmules asimptòtiques exponencialment petites per  $D(1, q)$  quan  $Q$  és una corba analítica, estrictament convexa i genèricament axisimètrica.

En aquest context, conjecturem que les diferències es comporten asimptòticament com un factor  $q^{-3}e^{-rq}$  per una funció constant o bé una funció periòdica. A més, l'exponent  $r$  és la meitat del radi de convergència de la transformada de Borel de la coneguda sèrie asimptòtica per les longituds de les trajectòries  $(1, q)$ -periòdiques. La conjectura es recolza fortament en els resultats numèrics obtinguts. Els càlculs necessiten aritmètica de precisió múltiple i són fets en PARI/GP.

Els experiments es restringeixen a pertorbacions d'el·lipses i cercles, que permeten comparar els resultats numèrics amb unes prediccions de Melnikov i detectar comportaments no genèrics a causa de la presència de més simetries en alguns casos.

Les fórmules asimptòtiques obtingudes s'assemblen a les obtingudes en l'escissió de separatrius en moltes aplicacions analítiques, en què la mida de l'escissió és d'ordre  $h^{-m}e^{(-\frac{r}{h})}$ . En aquests casos, el paràmetre  $h > 0$  és petit i continu i les fórmules són exponencialment petites en  $1/h$ .

S'ha demostrat (o està recolzat fortament per experiments numèrics) que l'exponent  $r$  és  $2\pi$  vegades la distància a l'eix real del conjunt de singularitats complexes de la solució homoclínica del flux d'un hamiltonià límit. Proposem i estudiem un equivalent a problema límit per l'aplicació billar.

A continuació, comentem com es comporta  $D(p, q)$  per òrbites  $(p, q)$ -periòdiques que tendeixen a regions de l'espai de fases diferents de la frontera de  $Q$ . En concret, considerem els casos de  $p/q$  tendint a un nombre irracional o a  $P/Q$ . L'estudi de  $D(p, q)$  en aquests casos es basa en un estudi numèric dels fenòmens.